

## Глава VI “Линейная функция и ее график”

### Функция, ее свойства

**Функция** – зависимость переменной  $y$  от переменной  $x$ , при которой каждому значению  $x$  соответствует одно значение  $y$ .

Переменную  $x$  называют **независимой переменной** или **аргументом**, а переменную  $y$  – **зависимой переменной**. Значение  $y$ , соответствующее заданному значению  $x$ , называют **значением функции**.

Обозн:  $y = f(x)$

$f$  обозначается данная функция, т.е. функциональная зависимость между  $x$  и  $y$ .

**Область определения функции** – все значения, которые принимает независимая переменная, т.е.  $x$ . Обозн:  $D_x$

Пр. 1)  $y = \frac{1}{x-5}$ ,  $D_x$ :  $x \in \mathbb{R}$ , кроме  $x = 5$  или  $x \in (-\infty; 5) \cup (5; +\infty)$  (т.к. на 0 делить нельзя)

**Множество значений функции (область значений функции)** – все значения, которые принимает функция  $f(x)$ , т.е.  $y$ . Обозн:  $M_y$  или  $E_y$ .

Пр. 2)  $y = x^2$ ,  $E_y$ :  $y \in \mathbb{R}_+$  или  $y \geq 0$ , или  $y \in [0; +\infty)$  (т.к. любое число в квадрате есть число неотрицательное).

### Способы задания функции.

1. Функция может быть задана **формулой**. Такой способ называют **аналитическим**.

Пример: 1)  $y = 5 - x$ ;

$$2) y = x^2 + x + 1.$$

2. **Табличный способ**. При этом способе приводится таблица, указывающая значения функции для имеющихся значений аргумента.

Пример:  $y = 5 - x$ . Значение аргумента ( $x$ ) задаем сами, а значение функции ( $y$ ) получим при подстановки аргумента в формулу.

$x$	-2	0	1	5
$y$	7	5	4	0

3. **Графический способ**. Пусть некоторая функция задана формулой  $y = f(x)$ .

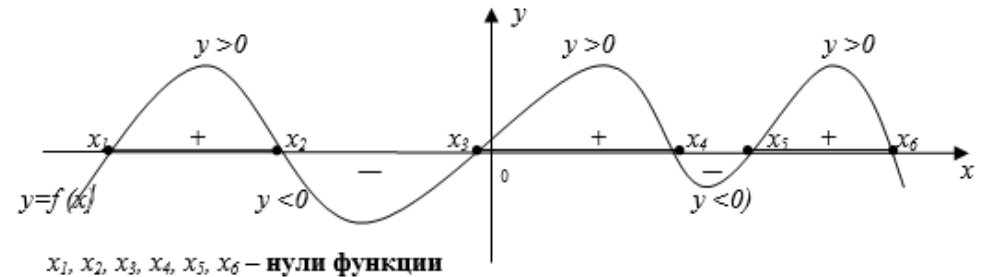
Опр.: **Графиком функции** называют множество всех точек координатной плоскости, абсциссы которых равны значениям независимой переменной, а ординаты – соответствуют значениям функции.

### Свойства функции

**I. Нули функции** – точки пересечения графика с осью  $OX$ , если  $y=0$ .

**Значение функции положительное**, если  $y > 0$ , тогда график расположен выше относительно оси  $OX$ .

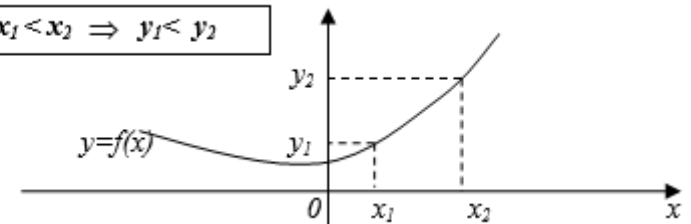
**Значение функции отрицательное**, если  $y < 0$ , тогда график расположен ниже относительно оси  $OX$ .



### II. Монотонность функции.

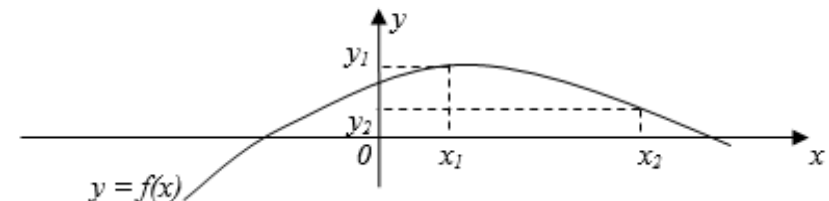
Функция  $y = f(x)$  **возрастает** на промежутке, если наименьшему значению аргумента соответствует наименьшее значение функции, т.е.

$$x_1 \text{ и } x_2 \in D_x, x_1 < x_2 \Rightarrow y_1 < y_2$$



Функция  $y = f(x)$  **убывает** на промежутке, если наименьшему значению аргумента соответствует наибольшее значение функции, т.е.

$$x_1 \text{ и } x_2 \in D_x, x_1 < x_2 \Rightarrow y_1 > y_2$$



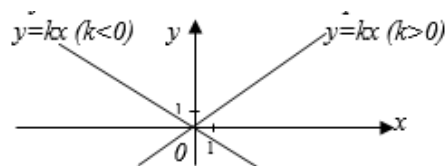
Промежутки возрастания и убывания функции называют **монотонностью функции**.

## Функция $y = kx$ и её график

**Опр.:** **Прямая пропорциональность** – это функция, заданная формулой  $y = kx$ , где  $k \neq 0$ . В формуле этой функции независимая переменная ( $x$ ) представлена в *первой степени* и расположена в *числителе*.

Число  $k$  называется **коэффициентом пропорциональности**.

Графиком прямой пропорциональности  $y = kx$  является **прямая, проходящая через начало координат**, т.е. график проходит через  $O(0;0)$ .

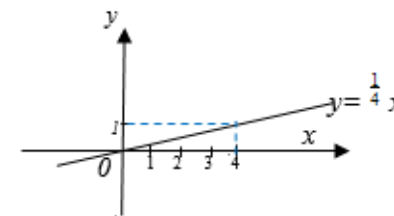


Для построения прямой достаточно всего двух точек. В функции  $y = kx$  одна точка всегда известна - это  $O(0;0)$ , начало координат.

**Алгоритм построения графика функции  $y = kx$ ,  $k \neq 0$ .**

<i>Шаги:</i>	<i>Пример:</i>						
$y = kx$	$y = \frac{1}{4}x$						
1.Определить чему равно $k$ , число которое надо умножить на $x$ , чтобы получить $kx$ .	$k = \frac{1}{4}$						
2. Построить и заполнить таблицу. Значение $x$ задают сами, те которые удобно подсчитать. А $y$ получают из формулы функции, для этого надо подставить вместо $x$ каждое значение.	<table><tr><td><math>x</math></td><td>0</td><td>4</td></tr><tr><td><math>y</math></td><td>0</td><td>1</td></tr></table> <p><math>x = 0</math>, тогда <math>y(0) = \frac{1}{4} \cdot 0 = 0</math>;</p> <p><math>x = 4</math>, тогда <math>y(4) = \frac{1}{4} \cdot 4 = \frac{1 \cdot 4}{4 \cdot 1} = 1</math></p> <p>(0 ; 0) и (4 ; 1)</p>	$x$	0	4	$y$	0	1
$x$	0	4					
$y$	0	1					
<table><tr><td><math>x</math></td><td></td><td></td></tr><tr><td><math>y</math></td><td></td><td></td></tr></table>	$x$			$y$			
$x$							
$y$							

3. В системе координат отметить точки с полученными координатами. Через эти две точки провести прямую. На прямой подписать формулу функции.



## Исследование графика функции по формуле, которая ее задает

1. По **знаку** коэффициента пропорциональности  $k$ :

$y = 2x, k = 2 > 0$	$y = -2x, k = -2 < 0$
<b>Вывод:</b> Если $k > 0$ , то функция $y = kx$ - <b>возрастает</b>	<b>Вывод:</b> Если $k < 0$ , то функция $y = kx$ - <b>убывает</b>

2. По **значению модуля** коэффициента пропорциональности  $|k|$ :

$y = 2x,  k  = 2 > 1$	$y = \frac{1}{2}x,  k  = \frac{1}{2} < 1$
<b>Вывод:</b> Если $ k  > 1$ , то график функции $y = kx$ расположен ближе к оси $OY$ .	<b>Вывод:</b> Если $ k  < 1$ , то график функции $y = kx$ расположен ближе к оси $OX$ .

## Линейная функция

**Линейная функция** – это функция, которая задана формулой  $y = kx + b$ , где  $k \neq 0$  и  $b \neq 0$ .

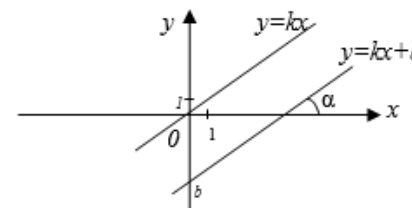
В формуле этой функции независимая переменная ( $x$ ) представлена в *первой степени* и расположена в *числителе*.

### Алгоритм построения графика линейной функции

<p><i>Шаги:</i></p> $y = kx + b$	<p><i>Пример:</i></p> $y = \frac{1}{4}x - 2$												
<p>1. Определить чему равно <math>k</math>, число которое надо умножить на <math>x</math>, чтобы получить <math>kx</math>.</p>	$k = \frac{1}{4}$												
<p>2. Построить и заполнить таблицу. Значение <math>x</math> задают сами, те которые удобно подсчитать. А <math>y</math> получают из формулы функции, для этого надо подставить вместо <math>x</math> каждое значение.</p> <table border="1" style="margin-top: 10px;"> <tr> <td style="text-align: center;"><math>x</math></td><td></td><td></td></tr> <tr> <td style="text-align: center;"><math>y</math></td><td></td><td></td></tr> </table>	$x$			$y$			<table border="1" style="margin-top: 10px;"> <tr> <td style="text-align: center;"><math>x</math></td><td style="text-align: center;">0</td><td style="text-align: center;">4</td></tr> <tr> <td style="text-align: center;"><math>y</math></td><td style="text-align: center;">- 2</td><td style="text-align: center;">- 1</td></tr> </table> <p> <math>x = 0, \Rightarrow y(0) = \frac{1}{4} \cdot 0 - 2 = - 2;</math>  <math>x = 4, \Rightarrow y(4) = \frac{1}{4} \cdot 4 - 2 = \frac{1 \cdot 4}{4 \cdot 1} - 2 = - 1 /</math>              (0 ; - 2) и (4 ; - 1)         </p>	$x$	0	4	$y$	- 2	- 1
$x$													
$y$													
$x$	0	4											
$y$	- 2	- 1											
<p>3. В системе координат отметить точки с полученными координатами. Через эти две точки провести прямую. На прямой подписать формулу функции.</p>	<p>График функции <math>y = \frac{1}{4}x - 2</math> на координатной плоскости. Прямая проходит через точки <math>(0, -2)</math> и <math>(4, -1)</math>. Точка <math>(0, -2)</math> отмечена на оси <math>y</math>, а точка <math>(4, -1)</math> отмечена на оси <math>x</math>. Дashed lines соединяют эти точки с осями. Формула <math>y = \frac{1}{4}x - 2</math> подписана на прямой.</p>												

1. **Графиком** функции является **прямая**.
2. При  $k > 0$  функция **возрастает**, а при  $k < 0$  - **убывает** на всей числовой прямой.
3. Число  $b$  показывает, где **график пересекает ось ОУ**.

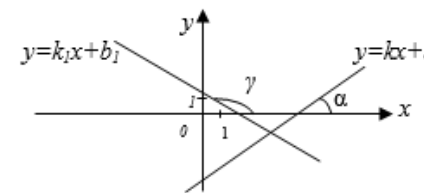
График линейной функции  $y = kx + b$  есть прямая, которая параллельна прямой, являющейся графиком функции  $y = kx$ , и проходящая через точку  $(0; b)$  оси ординат.



Число  $k$  называется **угловым коэффициентом** прямой.  $\alpha$  - угол прямой, который образуется между прямой и положительным лучом ОХ.

$$0^\circ < \alpha < 90^\circ \Rightarrow k > 0$$

$$90^\circ < \gamma < 180^\circ \Rightarrow k < 0$$

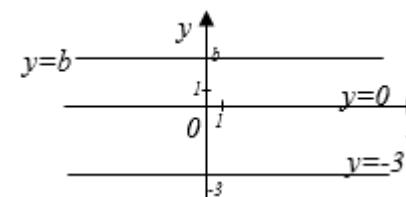


Если  $k = 0$ , то  $y = b$  – *прямая функция*; если  $b = 0$ , то  $y = kx$  – *прямая пропорциональность*.

### Постоянная функция

**Опр.:** **Постоянная функция** – это функция, заданная формулой  $y = b$ , где  $b$  – любое число.

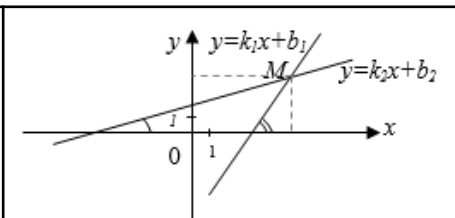
**Графиком** постоянной функции  $y = b$  является **прямая параллельная оси абсцисс** и проходящая через точку  $(0; b)$  на оси ординат. Графиком функции  $y = 0$  является ось абсцисс.

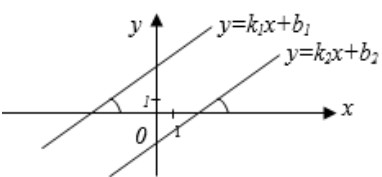


### Взаимное расположение графиков линейных функций

$y = k_1x + b_1$  и  $y = k_2x + b_2$  – линейные функции, *графиками* являются *прямые*.

**Прямые пересекаются**, если  $k_1 \neq k_2$ . Чтобы найти абсциссу точки пересечения, надо приравнять их формулы  $k_1x + b_1 = k_2x + b_2$ . Чтобы найти ординату – подставить найденное значение абсциссы в одну из формул этих функций.



<p><b>Прямые параллельны</b>, если <math>k_1=k_2</math> при <math>b_1 \neq b_2</math>, то прямые не совпадают.</p>	
<p><b>Прямые совпадают</b>, если <math>k_1=k_2</math> при <math>b_1=b_2</math>.</p>	